

BAC

المجتهد

# حوليات الرياضيات

3AS

مواضيع مقترحة  
لشهادة البكالوريا  
Hard\_equation

Hard  
شعبة  
العلوم التجريبية  
equation

مواضيع بكالوريا  
اختبارات نموذجية  
حلول مفصلة

إعداد: ع. بومهدي

منشورات  
المجتهد





# بِسْمِ اللَّهِ الرحمن الرحيم

محفوظة  
جميع الحقوق

© جميع الحقوق محفوظة  
**Hard\_equation**  
© Tous droits réservés

الإيداع القانوني 5339 - 2011 : D. L

ر.د.م.ك 4 - 51-906-9947-978 : ISBN

إعداد : ع . بومهدي

- ❖ مواضيع بكالوريا
- ❖ اختبارات نموذجية
- ❖ حلول مفصلة
- ☆ شعبة علوم تجريبية

# المُجْتَهَد في الرياضيات مواضيع مقترحة السنة 3 ثانوي

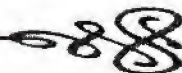
# BAC

وفق المبرمج الجديد الذي اقترحه  
وزارة التربية الوطنية  
**equation**

دار المجتهد للنشر والتوزيع

E-mail : Almoujtahid @ hotmail.com

طبعة 2012-2013



## الموضوع الأول

شعبة علوم الطبيعة والحياة  
بكالوريا جوان 2011

### التمرين الأول: (3 نقاط)

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = -1$  و من أجل

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 ; n \text{ عدد طبيعي}$$

( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

- في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ؛ إجابة واحدة فقط منها صحيحة ؛ حددها مع التعليل .

1- المتتالية ( $v_n$ )

أ- حسابية      ب- هندسية

ج- لا حسابية ولا هندسية .

2- نهاية المتتالية ( $u_n$ ) هي

$$-\infty \quad \text{ج-} \quad -\frac{1}{2} \quad \text{ب-} \quad +\infty \quad \text{أ-}$$

3- نضع من أجل عدد طبيعي  $n$

$$S_n = \frac{-1}{2} \left[ 1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3} \right]$$

$$S_n = \frac{1-3^n}{4} \quad \text{ب-} \quad S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} \quad \text{أ-}$$

$$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4} \quad \text{ج-}$$

### التمرين الثاني: (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

( $o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) ؛ المستوي ( $p$ ) الذي يشمل النقطة

$A(1, -2, 1)$  و  $\vec{n}(-2, 1, 5)$  شعاع ناظمي له ؛ و

ليكن ( $Q$ ) المستوي ذا المعادلة  $x + 2y - 7 = 0$  .

1- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي ( $P$ ) .

2- أ- تحقق أن النقطة  $B(-1, 4, -1)$  مشتركة بين

المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ) .

ب- بين أن المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ) متقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ )  
يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3- لتكن النقطة  $C(5, -2, -1)$

أ- أحسب المسافة بين النقطة  $C$  و المستوي ( $P$ ) ثم المسافة بين  
النقطة  $C$  و المستوي ( $Q$ ) .

ب- أثبت أن المستويين ( $P$ ) و ( $Q$ ) متعامدان .

ج- استنتج المسافة بين النقطة  $C$  و المستقيم ( $\Delta$ ) .

### التمرين الثالث: (5 نقاط)

نعتبر المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ( $o, \vec{u}, \vec{v}$ )

النقط  $A, B, C$  التي لاحتقاتها على التوالي :

$$z_A = -i ; z_B = 2 + 3i ; z_C = -4 + i$$

$$1- \text{ أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

ب- عين طول المركبة  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  و عمدة له ؛ ثم استنتج

طبيعة المثلث  $ABC$  .

2- نعتبر التحويل النقطي  $T$  في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$

ذات اللاحقة  $z$  ؛ النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل  $T$  محدداً عناصره المميزة .

ب- ما هي صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$  .

3- لتكن  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقاط  $A, C, D$  في استقامة .

ب- عين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  و يحول النقطة

$C$  إلى النقطة  $D$  .

ج- عين العناصر المميزة للتشابه  $S$  الذي مركزه  $A$  و يحول

$B$  إلى  $D$  .

### التمرين الرابع: (7 نقاط)

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ بـ } R - \{-1\} \text{ المعرفة على } (1)$$

و ( $C_g$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و

متجانس ( $o, \vec{i}, \vec{j}$ ) (الشكل التالي) ؛

بقراءة بيانية :

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : (4 نقاط)

- $\alpha$  عدد حقيقي موجب تماماً و يختلف عن 1 .  
 (a) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 6$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$  .  
 (b) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$$

- 1- أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\alpha$  .  
 ب- أكتب بدلالة  $n$  و  $\alpha$  : عبارة  $v_n$  ثم استنتج بدلالة  $n$  و  $\alpha$  عبارة  $u_n$  .  
 ج- عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  التي تكون من أجلها المتتالية  $(u_n)$  مقاربة .

$$2- \text{ نضع } \alpha = \frac{3}{2}$$

- أحسب بدلالة  $n$  : المجموعين  $S_n$  و  $T_n$  حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ و}$$

### التمرين الثاني : (4 نقاط)

- نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  :  
 النقاط  $A, B, C$  التي لاحقاً على الترتيب :

$$z_C = 4i \text{ و } z_B = 3 + 2i \text{ ; } z_A = 3 - 2i$$

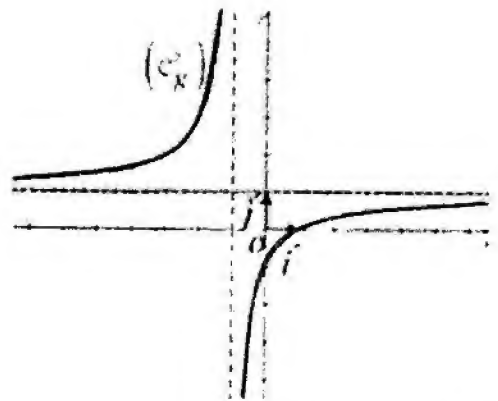
$$1- \text{ أ- عَلمَ النقاط } A, B, C$$

- ب- ما طبيعة الرباعي  $OABC$  ؟ علل إجابتك .

- ج- عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$

- 2- عين ثم أنشئ  $(E)$  مجموعة النقاط  $M$  من المستوى التي تحقق :

$$\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$$



- أ- شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  .  
 ب- حل بيانياً المتراجحة  $g(x) > 0$  .  
 ج- عين بيانياً قيم  $x$  التي يكون من أجلها  $0 < g(x) < 1$  .

- (II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]1, +\infty[$  بـ

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

- و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

- 1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ثم

فسر النتيجة هندسياً .

- 2- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \quad ]1, +\infty[$$

- ب- أحسب  $f'(x)$  و ادرس إشارتها ثم شكل جدول التغيرات الدالة  $f$  .

- 3- أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج- عين إشارة

$$\text{العبارة } \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \text{ على المجال } ]1, +\infty[$$

- ب-  $\alpha$  عدد حقيقي .

- بين أن الدالة :  $x \mapsto (x-\alpha) \ln(x-\alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  على المجال  $[\alpha, +\infty[$  .

- ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$$]1, +\infty[ \text{ : } g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

- للدالة  $f$  على المجال  $]1, +\infty[$  .

## التمرين الرابع : (7 نقاط)

أ - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $R$  بـ :

$$f(x) = e^x - ex - 1$$

(C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و

المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

1- أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب - أحسب  $f'(x)$  ثم ادرس إشارتها .

ج - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

2 - أ - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -ex - 1$

مقارب مائل للمنحنى (C<sub>f</sub>) بجوار  $(-\infty)$  .

ب - أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C<sub>f</sub>) في النقطة

ذات الفاصلة 0 .

ج - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال

$$[1,76; 1,75]$$
 حلاً وحيداً  $\alpha$  .

د - أرسم المستقيمين  $(\Delta)$  و (T) ثم المنحنى (C<sub>f</sub>) على المجال

$$]-\infty, 2]$$
 .

3 - أ - أحسب بدلالة  $\alpha$  : المساحة  $A(\alpha)$  للحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C<sub>f</sub>) و حامل محور القواصل و المستقيمين اللذين

$$x = \alpha \text{ و } x = 0$$
 معادلتيهما .

ب - أثبت أن  $A(\alpha) = \left( \frac{1}{2} e \alpha^2 - e \alpha + \alpha \right) ua$

( $ua$  هي وحدة المساحات) .

3- أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة C : المعادلة ذات

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$
 : المجهول  $z$  التالية :

نسمي  $z_0$  و  $z_1$  حلي هذه المعادلة .

ب - لتكن M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب  $z$  .

عين مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق :

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

## التمرين الثالث : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط  $A(0, 1, 5)$  ؛

$B(2, 1, 7)$  ؛  $C(3, -3, 6)$  .

1- أ - أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل

النقطة B و  $\vec{u}(1, -4, -1)$  شعاع توجيه له .

ب - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

ج - بين أن الشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  متعامدان .

د - استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم  $(\Delta)$  .

2- نعتبر النقطة  $M(2+t, 1-4t, 7-t)$

حيث  $t$  عدد حقيقي ؛ و لتكن الدالة  $h$  المعرفة على R

$$h(t) = AM$$

أ - أكتب عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$  .

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$  ؛

$$h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

ج - استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي تكون من أجلها

المسافة AM أصغر ما يمكن .

فأرنا بين القيمة الصغرى للدالة  $h$  ؛ و المسافة بين النقطة A

و المستقيم  $(\Delta)$  .



## حل الموضوع الأول

### التمرين الأول :

تحديد الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث مع التعليل :

الاقتراح	الإجابة الصحيحة	التعليل
1	ب- هندسية	$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$ $= 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$
2	ج- النهاية $-\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( v_n - \frac{1}{2} \right)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2} 3^n - \frac{1}{2} \right) = -\infty$
3	ج- المجموع $S_n$	$S_n = \frac{-1}{2} (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n)$ $= \frac{1}{2} \left( 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

### التمرين الثاني :

1- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

(P) له معادلة من الشكل  $ax + by + cz + d = 0$

لدينا الشعاع  $\vec{n}(-2, 1, 5)$  ناظمي للمستوي (P) .

ومنه (P) معادلته من الشكل :

$$-2x + y + 5z + d = 0$$

$A \in (P)$  معناه  $-2 + (-2) + 5 + d = 0$

ومنه :  $d = -1$

ومنه (P) معادلته من الشكل  $-2x + y + 5z - 1 = 0$

2-أ- التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) :

لدينا  $B \in (P)$  لأن  $-2(-1) + (4) + 5(-1) - 1 = 0$

لدينا :  $B \in Q$  لأن  $(-1) + 2(4) - 7 = 0$

ومنه النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بيان أن (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) :

(P) و (Q) متقاطعان معناه  $\vec{n}_P$  لا يوازي  $\vec{n}_Q$

$\vec{n}_P(-2, 1, 5)$  لا يوازي  $\vec{n}_Q(1, 2, 0)$  لأن :

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1} \quad \text{إذن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)}$$

- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 & \dots\dots\dots(1) \\ -2x + y + 5z - 1 = 0 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

نضع  $y = t$  حيث  $t$  وسيط حقيقي

من المعادلة (1) نجد  $x = -2t + 7$

بتعويض قيمة كل من  $x$  و  $y$  في المعادلة (2) نجد

$$z = -t + 3 \quad \text{ومنه} \quad -2(-2t + 7) + t + 5z - 1 = 0$$

$$(t \in R) \text{ و } \begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو :}$$

3-أ- حساب المسافة بين C و (P) ثم بين C و (Q) :

$$d(C; (P)) = \frac{|-2(5) + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (5)^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$d(C; (Q)) = \frac{|(5) + 2(-2) - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

(P) و (Q) متعامدان معناه  $\vec{n}_P$  يعامد  $\vec{n}_Q$  معناه :

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1(-2) + 2(1) + 0(5) = 0$$

Hard equation

إذن :  $(P) \perp (Q)$

ج- استنتاج المسافة بين النقطة C و المستقيم  $(\Delta)$  :

المسافة بين النقطة C و المستقيم  $(\Delta)$  هي الطول CH

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على  $(\Delta)$  .

$$\text{لدينا : } CH^2 = d(C; (P))^2 + d(C; (Q))^2$$

و منه :

$$CH = \sqrt{d(C; (P))^2 + d(C; (Q))^2} = 3\sqrt{2}$$

## النمرين الثالث :

أ - كتابة على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  :

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-4 + i + i}{2 + 3i + i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} \\ &= \frac{20i}{20} = i \end{aligned}$$

ب- تعيين طبيعة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  و عمدة له :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ و}$$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } AC = AB$$

و منه المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

2-أ - تعيين طبيعة التحويل T وتحديد عناصره المميزة :

من العبارة المركبة للتحويل T لدينا :

$$b = -1 - i \text{ و } a = i$$

التحويل T دوران لأن  $|a| = 1$

العناصر المميزة هي الزاوية  $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$  و المركز هو A

لأن :

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{2} = -i = z_A$$

ب- تعيين صورة النقطة B بالتحويل T :

$$\text{لدينا : } z_B = iz_B - 1 - i = i(2 + 3i) - 1 - i = -4 + i$$

و منه صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3-أ - بيان أن النقط A , C , D في استقامية :

النقط A , C , D في استقامية معناه  $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$  حقيقي

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-6 + 3i}{-4 + 2i} \\ &= \frac{(-6 + 3i)(-4 - 2i)}{(-4 + 2i)(-4 - 2i)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

و منه نقط A , C , D في استقامية .

ب- تعيين نسبة التحاكي h :

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي h هي :

$$z_D - z_A = k(z_C - z_A)$$

$$\text{حيث } k \text{ هي نسبة التحاكي } h \text{ و منه : } k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$$

ج- تعيين العناصر المميزة للتشابه S :

العبارة المختصرة المركبة للتشابه S هي :

$$z_D - z_A = a(z_B - z_A)$$

حيث Z عدد مركب و  $a = [r; \theta]$  .

$$\begin{aligned} a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-6 + 3i}{2 + 4i} = \frac{(-6 + 3i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} \\ &= \frac{30i}{20} = \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

و منه نسبة التشابه S هي :

$$\arg(a) = \frac{\pi}{2} \text{ و زاوية } |a| = \frac{3}{2}$$

## النمرين الرابع :

I - بقراءة بيانية

أ - تشكيل جدول التغيرات للدالة g :



ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماماً من أجل كل  $x \in ]1, +\infty[$

جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	1

3- أ - تعيين إشارة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجال  $]1, +\infty[$ :

من (I) جـ - لدينا  $x \in ]1, +\infty[$

ومنه:  $\ln[g(x)] < \ln 1$

أي:  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1$

ب- بيان أن الدالة  $x \mapsto (x-\alpha) \ln(x-\alpha) - x$

أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  على المجال  $[\alpha; +\infty[$

$$\begin{aligned} & [(x-\alpha) \ln(x-\alpha) - x]' \\ &= 1 \cdot \ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha} (x-\alpha) - 1 \\ &= 1 \ln(x-\alpha) + 1 - 1 = \ln(x-\alpha) \end{aligned}$$

جـ - التحقق من أن  $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$

من أجل  $x \in ]1, +\infty[$

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

تعيين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1, +\infty[$ :

لدينا:  $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

الدالة الأصلية لـ  $g$  هي الدالة  $x \mapsto x - 2\ln(x+1)$

حسب الجواب 3-ب)

نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-1)$

هي الدالة  $x \mapsto (x-1) \ln(x-1) - x$

و الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x+1)$

هي الدالة  $x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$

ومنه الدالة الأصلية للدالة  $f$  هي الدالة  $F$  حيث:

$$F(x) = x + (x-1) \ln(x-1) - (x+3) \ln(x+1)$$

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	1	$+\infty$	1

ب- حل بيانياً المتراجحة  $g(x) > 0$ :

من البيان  $g(x) > 0$  تكافئ

$$x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

لأن  $(C_g)$  يقع فوق محور الفواصل على هاذين المجالين.

جـ - تعيين بيانياً قيم  $x$  والتي من أجلها يكون  $0 < g(x) < 1$

$$0 < g(x) < 1$$

من البيان لدينا:  $0 < g(x) < 1$  تكافئ

$$x \in ]1, +\infty[$$

$$\text{II - 1 - حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) + \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي للنتيجتين:

$(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته  $x = 1$

$(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته:  $y = 1$  بجوار  $+\infty$

2- أ - بيان أن  $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$  من أجل  $x \in ]1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب  $f'(x)$  و دراسة إشارتها و تشكيل جدول

تغيراتها:

لدينا:  $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0 \end{aligned}$$

## حل الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

1- أ- أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\alpha$  :

$(v_n)$  هندسية أساسها  $\alpha$  معناه  $v_{n+1} = \alpha v_n$

من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  لدينا :  $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

و  $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$= \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$= \alpha \left( u_n + \frac{1}{\alpha - 1} \right) = \alpha v_n$$

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  واستنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  :

لدينا :  $v_n = v_0 \times q^n$

حيث :  $v_n = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1}$  و منه :

$$v_n = \left( 6 + \frac{1}{\alpha - 1} \right) \cdot \alpha^n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1}$$

لدينا :  $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$  و منه :

$$u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$u_n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

ج- تعيين قيم  $\alpha$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

حتى تكون  $(u_n)$  متقاربة يجب أن يكون الأساس

$$0 < \alpha < 1$$

2- حساب المجموعين  $T_n$  و  $S_n$  :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left( \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \right)$$

$$= 8 \times \left( \frac{\left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right) = 16 \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \text{ لدينا :}$$

لدينا :  $T_n = u_n + u_1 + \dots + u_n$

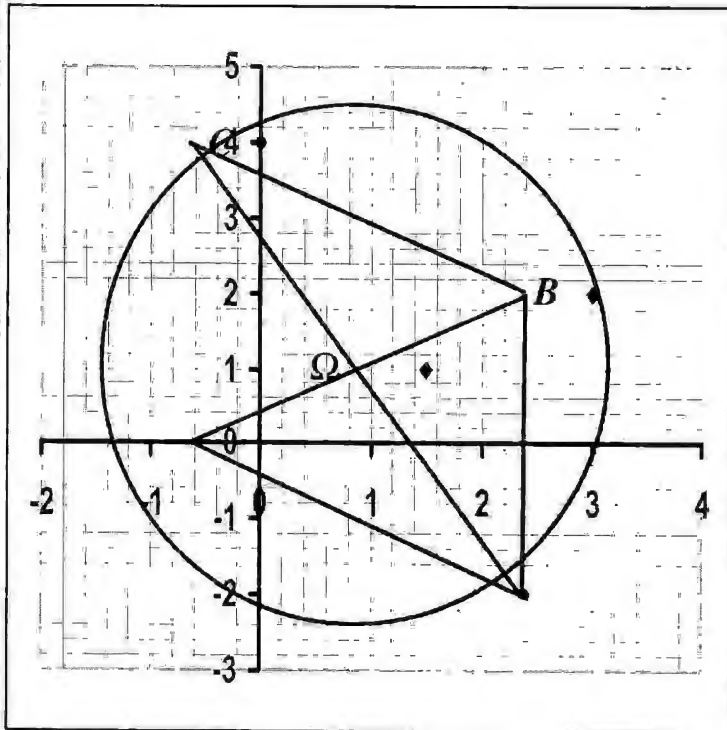
نعلم أن  $u_n = v_n - 2$  و منه :  $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1}$

و عليه  $T_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2)$

$$T_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 2(n+1) = S_n - 2(n+1)$$

### التمرين الثاني :

أ- تعليم النقط A , B , C :



ب- تعيين طبيعة الرباعي OABC مع التعليل :

الرباعي OABC متوازي أضلاع لأن :

$$\overline{OC} (z_C - z_O) = \overline{AB} (z_B - z_A)$$

$$\overline{OC} (4i) = \overline{AB} (4i) \text{ أي :}$$

ج- تعيين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي OABC :

النقطة  $\Omega$  هي منتصف القطرين [AC] و [OB]

$$z_\Omega = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0 + 3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i \text{ هي :}$$

2- تعيين ثم إنشاء مجموع النقط (E) :

الجملة الأخيرة هي تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$   
 ب- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  :  
 $C \in (\Delta)$  معناه توجد قيمة وحيدة لـ t

$$\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases} \begin{cases} 3=t+2 \\ -3=-4t+1 \\ 6=-t+7 \end{cases}$$

تحقق الجملة أي

ج- بيان أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان :  
 لدينا :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0$$

إذن  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  متعامدان

د- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم  $(\Delta)$  :

المسافة بين النقطة A والمستقيم  $(\Delta)$  هي الطول AB  
 لأن  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$  والنقطتان B و C تنتميان إلى المستقيم  $(\Delta)$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

و منه :

2-أ- كتابة عبارة  $h(t)$  بدلالة t :

لدينا :  $h(t) = AM$

$$AM = \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{18t^2 + 8}$$

ب- بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي t :  $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$

لدينا  $h(t) = \sqrt{18t^2 + 8}$  و منه :

$$h'(t) = \frac{2 \times 18t}{2\sqrt{18t^2 + 8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

ج- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن .

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة h قيمة حدية صغرى (ينعدم المشتق ويغير إشارته) .

$$h'(t) = 0 \text{ معناه } \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}} = 0 \text{ و منه } t = 0$$

إشارة المشتق :  $h'(t)$  هي حسب الجدول التالي :

$$\text{لدينا : } \left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12 \dots *$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| 4 \overrightarrow{M\Omega} \right\| = 12$$

لأن  $\Omega$  مركز الرباعي OABC .

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| \overrightarrow{M\Omega} \right\| = 3 \text{ و عليه مجموعة النقط (E) هي}$$

دائرة مركزها  $\Omega$  و نصف قطرها 3 .

ملاحظة : إنشاء (E) في الشكل السابق .

3-أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة C : المعادلة ذات

$$\text{الجهول } z \text{ التالية : } z^2 - 6z + 13 = 0$$

حل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر  $\Delta' = b'^2 - ac$

$$\text{لدينا : } \Delta' = (-3)^2 - 2(1)(13) = -4 \text{ أي :}$$

$$\Delta' = (2i)^2 \text{ و منه حلا المعادلة هما :}$$

$$z_1 = 3 + 2i ; z_0 = 3 - 2i$$

ب- تعيين مجموعة النقط M من المستوي :

$$\text{لدينا : } |z - z_0| = |z - z_1| \text{ تكافئ :}$$

$$MA = MB \text{ تكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|$$

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي محور القطعة

المستقيمة [AB] .

## التمرين الثالث :

1-أ- كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  :

لدينا  $(\Delta)$  يشمل النقطة B و  $\vec{u}(1; -4; -1)$  شعاع

توجيه له .

$$\overrightarrow{BM} = t \vec{u} \text{ معناه } (\Delta) \text{ نقطة M(x, y, z)}$$

(t وسيط حقيقي)

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-7 \end{pmatrix} = t \vec{u} - \begin{pmatrix} t \\ -4t \\ -t \end{pmatrix} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -4t + 1 \\ z = -t + 7 \end{cases} \text{ معناه}$$



ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

(T) له معادلة من الشكل  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومن ثم :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$y = (1 - e)(x - 0) + 0 = (1 - e)x$$

ج- بيان أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال

$[1,75; 1,76]$  حلاً وحيداً  $\alpha$  :

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $[1,75; 1,76]$

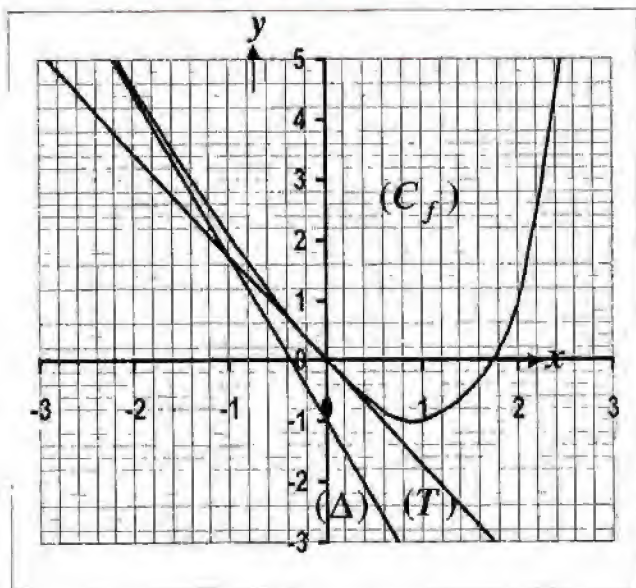
و :  $f(1,75) \times f(1,76) < 0$  فحسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1,75; 1,76]$  حلاً

وحيداً  $\alpha$ .

د- رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C<sub>f</sub>) على المجال

**Hard\_equation** :  $]-\infty, 2]$



3- أ- حساب المساحة  $A(\alpha)$  :

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) \cdot dx = - \left[ e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^\alpha$$

$$A(\alpha) = \left( 1 - e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha \right) \quad \text{نجد بعد الحساب :}$$

$$\text{ب- إثبات أن } A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) u\alpha$$

لدينا  $f(\alpha) = 0$  من الجواب (2-ج) ومنه :

$$A(\alpha) = e^\alpha = e \cdot \alpha + 1 \quad \text{بما يساويها في عبارة } A(\alpha)$$

$$\text{نجد : } A(\alpha) = \left( \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) u\alpha$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى للدالة  $h$  : والمسافة بين

النقطة A والمستقيم (Δ) :

$$h(0) = 2\sqrt{2} = AB \quad \text{نجد أن}$$

**التمرين الرابع :**

$$f(x) = e^x - ex - 1$$

1- أ- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ex - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex - 1 = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

ب- حساب  $f'(x)$  ثم دراسة إشارتها :

$$f'(x) = e^x - e \quad \text{و إشارتها هي : } \begin{array}{c} - \\ 1 \\ + \end{array}$$

ج- تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

2- أ- بيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة  $y = -ex - 1$

مقارب مائل للمنحنى (C<sub>f</sub>) بجوار  $(-\infty)$  :

لدينا المستقيم (Δ) له معادلة من الشكل  $y = -ex - 1$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$$

ومن ثم المستقيم (Δ) ذو المعادلة  $y = -ex - 1$  مقارب

مائل للمنحنى (C<sub>f</sub>) بجوار  $(-\infty)$  .

## الاخبار الثالث

بكالوريا جـ وان 2010

### التمرين الاول : (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحتقيهما على

الترتيب :  $z_A = 1 + i$  و  $z_B = 3i$

1/ أكتب على الشكل الأسّي :  $z_A$  و  $z_B$ .

2/ ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث :

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ/ عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$ .

ب/ عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$ .

جـ/ استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

3/ لتكن النقطة  $D$  مرجح الجملة

$$\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$$

أ/ عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$ .

ب/ عين مع التبرير طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

4/ لتكن النقطة  $M$  نقطة من المستوي تختلف عن  $B$  و عن  $D$  لاحقتها  $z$  و لتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة

$z$  التي يكون من أجلها  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما.

1/ تحقق أن النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $z_E = 6 + 3i$

تنتمي إلى  $(\Delta)$ .

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$

عين عندئذ المجموعة  $(\Delta)$ .

### التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  النقط :

$$A(1; 1; 0), B(2; 1; 1), C(-1; 2; -1)$$

1/ أ/ بين أن النقط  $A, B$  و  $C$  ليست في استقامية.

ب/ بين أن المعادلة الديكارية للمستوي  $(ABC)$  هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

2/ نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  اللذين معادلتهم على الترتيب :

$$(P) : x + 2y - 3z + 1 = 0$$

$$(Q) : 2x + y - z - 2 = 0$$

و المستقيم  $(D)$  الذي يشمل النقطة  $F(0; 4; 3)$

و  $G(-1; 5; 3)$  شعاع توجيه له.

أ/ أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم  $(D)$ .

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هو المستقيم  $(D)$ .

3/ عين تقاطع المستويات الثلاثة  $(ABC), (P)$  و  $(Q)$ .

### التمرين الثالث : (10 نقاط)

1/ لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $I = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$

$$f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1/ أحسب  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2/ بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$  ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ عين فاصلة النقطة من  $(C_f)$  التي يكون فيها المماس موازيا

للمستقيم  $(d)$  ذي المعادلة  $y = x$ .

4/ أ/ أثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $I$  يمكن كتابة  $f(x)$  على

الشكل :

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث :  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان يطلب تعيينهما.

## حل الاختبار الثالث

### التمرين الأول :

1/ كتابة  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي :

لدينا  $|z_A| = \sqrt{2}$  و  $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$

ومنه :  $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا  $|z_B| = 3$  و  $\arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$

ومنه :  $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

2/ أ/ نسبة التشابه المباشر هو  $|2i| = 2$  و زاويته هي  $\arg(2i)$

أي  $\frac{\pi}{2}$  و مركزه هو النقطة  $\omega$  التي لاحققتها  $z_0$  تحقق

$z_0 = 3i$  أي  $z_0 = 2iz_0 + 6 + 3i$

و منه نستنتج أن :  $\omega = B$

ب/ تعيين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه تحقق العلاقة :

$z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 4 + 5i$

جـ/ بما أن  $C$  صورة  $A$  بالتشابه الذي مركزه  $B$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

فهذا يعني أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$ .

3/ أ/ بما أن  $D$  مرجح الجملة  $\{(A, 2), (B, -2), (C, 2)\}$

فإن :  $2\overline{DA} - 2\overline{DB} + 2\overline{DC} = \vec{0}$  أي :  $\overline{AD} = \overline{BC}$

أي :  $z_D - z_A = z_C - z_B$  أي :  $z_D = 5 + 7i$

ب/ لدينا  $\overline{AD} = \overline{BC}$  في الرباعي  $ABCD$  و منه :

الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع و لدينا المثلث  $ABC$  قائم في

$B$  و بالتالي الرباعي  $ABCD$  هو مستطيل .

4/ أ/ لدينا :  $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i} = 6$

ب/ استنتج أنه يمكن رسم  $(C_f)$  انطلاقاً من  $(C)$  منحني الدالة اللوغارتمية النيرية  $\ln$  ثم أرسم  $(C)$  و  $(C_f)$ .

II/ نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $I$  — :

$g(x) = f(x) - x$

1/ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ثم بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $I$  ثم شكل جدول تغيراتها

3/ أ/ أحسب  $g(1)$  ثم بين أن المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل في المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  حلاً وحيداً  $\alpha$ .

تحقق أن  $2 < \alpha < 3$ .

ب/ أرسم  $(C_g)$  منحني الدالة  $g$  على المجال  $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$

في المعلم السابق .

4/ استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $I$  ثم حدد وضعية

المنحني  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(d)$ .

5/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$[1; \alpha]$  فإن :  $f(x)$  ينتمي إلى المجال  $[1; \alpha]$ .

III/ نسمي  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما

يأتي :  $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

1/ عين قيمة العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون :

$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

2/ أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$



ب/ طريقة 1 : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  التي تحقق :

$$z = t \quad \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3t - 1 \\ 2x + y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{نحصل على :}$$

$$t = 3\lambda + 3 \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + 1 \\ y = \frac{5}{3}t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases} \quad \text{نجد :}$$

و هو التمثيل الوسيطى بمستقيم (D) .  
طريقة 2 :

بما أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فهذا يعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتى المستويين :

إحداثيات نقط المستقيم (D) هي :  $(-\lambda, 5\lambda + 4, 3\lambda + 3)$  تحقق معادلة (P) لاحظ أن :

$$-\lambda + 2(5\lambda + 4) - 3(3\lambda + 3) + 1 = 0$$

و كذلك بالنسبة لمعادلة المستوي (Q) .

3/ تعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) :  
لدينا :  $(Q) \cap (P) = (\Delta)$

مجموعة نقط تقاطع المستويين (ABC) و (P) تحقق إحداثياتها

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{الجملة التالية :}$$

بالعويض في الجملة حيث  $z = t$  فنجد :

$$\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$$

و هو تمثيل وسيطي مستقيم شعاع توجيهه  $\vec{\omega}(-1, 2, 1)$  بنفس الطريقة نجد تقاطع المستوي (ABC) و (Q)

و هو عدد حقيقي موجب إذن  $E \in (\Delta)$  .

ب/ عمدة العدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  هو قياس الزاوية  $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB})$

لدينا بعد وضع  $z = x + iy$  حيث  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

نجد أن  $\frac{z_B - z}{z_D - z} \in \mathbb{R}_+^*$  تعني  $y = 3$  مع  $x \neq 5$

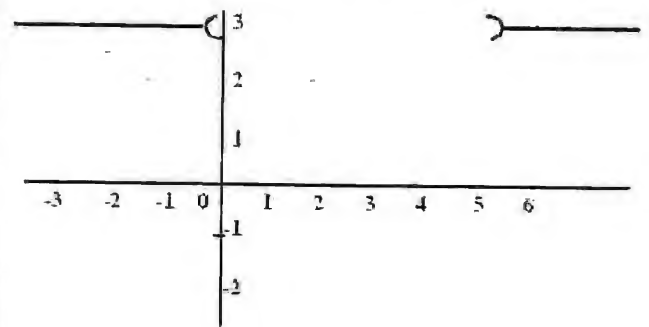
مع  $x^2 - 5x > 0$  أي :  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]5, +\infty[$

ي أن مجموعة النقط  $(\Delta)$  هي تقاطع المستقيم ذي المعادلة

$y = 3$  بإستثناء النقطة  $S(5, 3)$  مع المجموعة

$]-\infty, 0[ \cup ]5, +\infty[$  أي هي اتحاد نصفي المستقيمين

$y = 3$  مع  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]5, +\infty[$  .



## النمرين الثاني :

1/ أ/ لا يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث :  $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$

و لدينا :  $\overrightarrow{AB}(1, 0, 1)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2, 1, -1)$

فهذا يعني أن النقط A , B , C ليست في استقامة .

ب/ تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

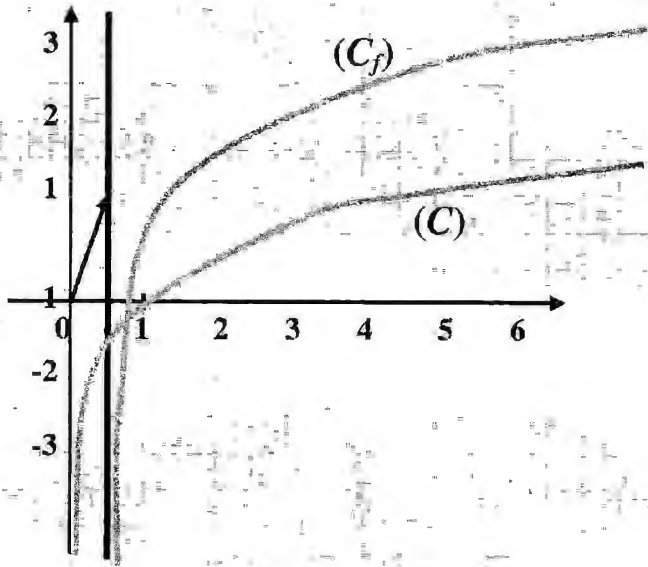
نعرض إحداثيات كل نقطة من النقط A , B , C في المعادلة و نتأكد من أنها تحقق المعادلة .

2/ أ/ يعطى التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل

النقطة  $F(0, 4, 3)$  و شعاع توجيهه له  $\vec{u}(-1, 5, 3)$

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases} \quad \text{كمايلي : مع } \lambda \text{ عدد حقيق كفي}$$

ب/ استنتاج أنه يمكن رسم  $(C_f)$  انطلاقاً من  $(C)$  منحني الدالة اللوغاريتمية النسيبية  $\ln$  ثم رسم  $(C)$  و  $(C_f)$  :  
حسب الكتابة  $f(x) = \ln(x+a) + b$  فإن  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(\frac{1}{2}, \ln 2e)$  و بالتالي يكون رسم  $(C)$  و  $(C_f)$  كما يلي :  $\ln 2e \approx 1,7$



1/ II حساب  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 1 + \ln(2x-1) - x = -\infty$$

تبيين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(2x-1) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x \left( \frac{\ln(2x-1)}{x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x} = 0 \text{ : لأن}$$

2/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $I$  ثم تشكيل جدول تغيراتها :

$$g'(x) = \frac{3-2x}{2x-1} \text{ : لدينا و } g \text{ تقبل الاشتقاق على } I$$

$$g'(x) = 0 \text{ تعني } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{حيث : } g'(x) > 0 \text{ لما } x < \frac{3}{2}$$

$$\text{و } g'(x) < 0 \text{ لما } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} \text{ هو المستقيم ذو التمثيل}$$

## النمرين الثالث :

1/ I أحساب  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty \text{ و}$$

2/ الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $I$  و لدينا :

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} \text{ و لدينا } f'(x) > 0 \text{ في } I$$

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $I$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	

3/ حتى يكون المماس (d) موازياً للنصف الأول يجب أن

يتحقق مايلي :

$$f'(x_0) = 1 \text{ حيث : } x_0 \text{ فاصلة النقطة المطلوبة.}$$

$$\text{لدينا : } f'(x_0) = 1 \text{ تعني : } \frac{2}{2x_0-1} = 1 \text{ أي : } x_0 = \frac{3}{2}$$

4/ أ/ إثبات أنه من أجل كل  $x$  من  $I$  يمكن كتابة  $f(x)$

$$\text{على الشكل : } f(x) = \ln(x+a) + b$$

لدينا من أجل كل  $x$  من  $I$  :

$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln 2(x - \frac{1}{2})$$

$$= 1 + \ln 2 + \ln(x - \frac{1}{2}) = \ln(2e) + \ln(x - \frac{1}{2})$$

$$\text{و منه : } a = -\frac{1}{2} \text{ و } b = \ln 2e$$

4 / استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $I$  :  
لاحظ البيان :  $g(x) \geq 0$  لما  $x \in [1, \alpha]$  و  $g(x) \leq 0$

لما  $x \in ]\frac{1}{2}, 1] \cup [\alpha, +\infty[$

- تحديد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى (d) :

لتحديد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى (d) ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x$  أي  $g(x)$  و كما هو موضح سابقا فإن :  
في المجال  $[1, \alpha]$  يكون  $(C_f)$  تحت (d) و في المجال

$]\frac{1}{2}, 1] \cup [\alpha, +\infty[$  يكون  $(C_f)$  فوق (d) .

5 / الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[1, \alpha]$  و بالتالي من أجل  $1 \leq x \leq \alpha$  نجد :

$f(1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$  و لكن :

$$f(1) = 1 \text{ و } f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$$

لأن :  $g(\alpha) = 0$  و منه :  $1 \leq f(x) \leq \alpha$

III / 1 / تعيين قيمة العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون :

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$\text{لدينا } u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

و بالتالي :  $u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

$$\text{تعني : } 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

أي :  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{9}{8}$  و منه :  $n = 8$  وهو المطلوب .

2 / حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n =$$

$$1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2 \times 1}\right) + 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2 \times 2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2 \times n}\right)$$

$$= n + \ln\left(\frac{3}{2 \times 1}\right) + \ln\left(\frac{5}{2 \times 2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n+1}{2 \times n}\right)$$

$$= n + \ln \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}{2^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

$$= n + \ln \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) \times 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)^2 \times 2^n}$$

$$= n + \ln \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$S_n = n + \ln \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \text{ و منه :}$$

- جدول تغيرات الدالة  $g$  : نأخذ  $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,19$

$x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{2} + \ln 2$	$-\infty$

3 / حساب  $g(1) = 0$  :

الدالة  $g$  رتيبة تماما على المجال  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$  (متناقصة تماما)

و بالتالي صورة المجال  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$  بالدالة  $g$  هي المجال

$\left]-\infty, -\frac{1}{2} + \ln 2\right[$  و بما أن :  $-\frac{1}{2} + \ln 2 > 0$

فهذا يعني أن 0 ينتمي إلى المجال  $\left]-\infty, -\frac{1}{2} + \ln 2\right[$

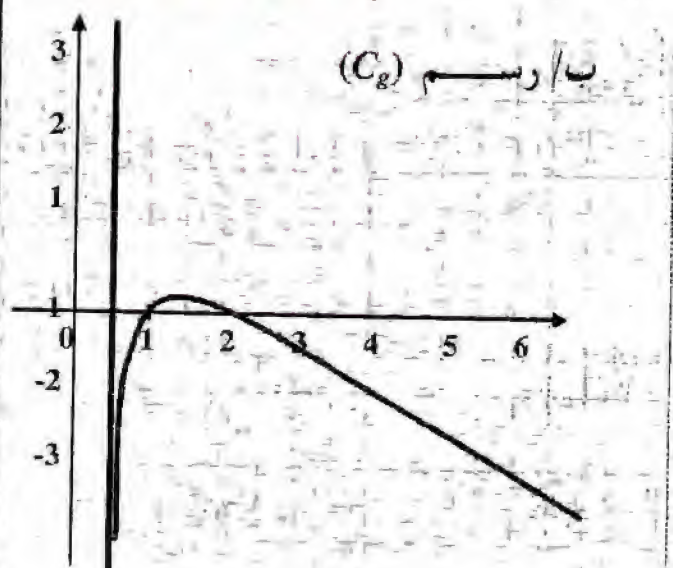
وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$

من المجال  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$

الدالة  $g$  رتيبة تماما على المجال  $[2, 3]$  و لدينا  $g(2) < g(3) < 0$  و بما أن  $\alpha$  وحيد فهذا يعني أن

**Hard equation**

$2 < \alpha < 3$



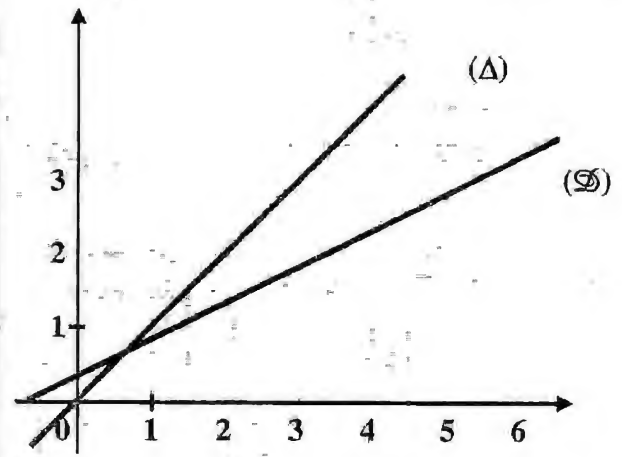


## الاخبار الرابع

بكالوريا — وان 2010

### التمرين الأول : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس مثلثا المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(D)$  معادلتيهما على الترتيب :  $y = x$  و  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ .



1/ لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية

$$u_0 = 6 \quad \mathbb{N}$$

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ/ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$$u_4 \text{ و } u_3 , u_2 , u_1 , u_0$$

دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب/ عين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(D)$  .

جـ/ أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

2/ أ/ باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n , u_n > \frac{2}{3} .$$

ب/ استنتج اتجاه تغيرات المتتالية  $(u_n)$  .

3/ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

أ/ بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

ب/ أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $v_n$  ، و استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

جـ/ أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و استنتج المجموع  $S'_n$  حيث :  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

### التمرين الثاني : (4 نقاط)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  لاحقاً على الترتيب :

$$z_D = -z_B ; z_C = -z_A$$

$$z_B = z_A ; z_A = 3 + 3i$$

أ/ بين أن النقط  $A, B, C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة ذات

المركز  $O$  مبدأ المعلم .

ب/ عين زاوية للدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  و يحول النقطة  $A$  إلى

النقطة  $B$  .

جـ/ بين أن النقط  $A, O$  و  $C$  في إستقامة و كذلك النقط

$B, O$  و  $D$  .

د/ استنتج طبيعة الرباعي  $ABCD$  .

### التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر المستوي  $(p)$  الذي معادلته :  $x - 2y + z + 3 = 0$

1/ نذكر أن حامل محور الفواصل  $(O; \vec{i})$  يعرف بالجملة :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- عين إحداثيات  $A$  نقطة تقاطع حامل  $(O; \vec{i})$  مع المستوي

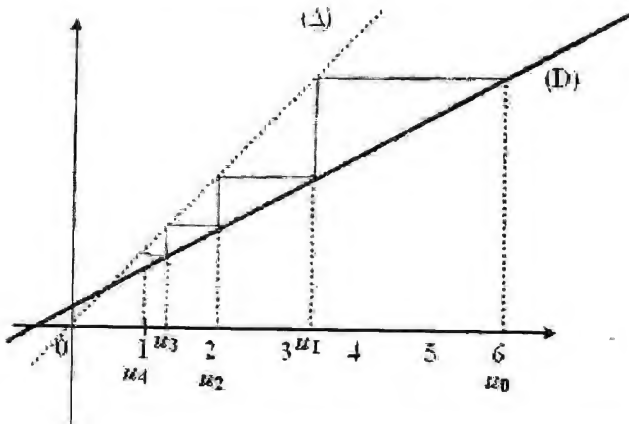
$(p)$

## حل الاختبار الرابع

### التمرين الأول :

1/ أ/ نقل الشكل ثم تمثيل على محور الفواصل الحدود التالية :

$$u_4 \text{ و } u_3, u_2, u_1, u_0$$



ب/ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(D)$  :

فاصلة نقطة التقاطع  $(\Delta)$  و  $(D)$  هي حلول المعادلة

$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} \text{ أي } x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

$$\text{أي } x = \frac{2}{3} \text{ و منه } y = \frac{2}{3}$$

$$\text{إذن : } (\Delta) \cap (D) = \left\{ H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

ج/ إعطاء تخمينات حول اتجاه تغيير المتتالية  $(u_n)$  :

التخمين الذي يمكن إعطاؤه هو أن المتتالية متناقصة تماما .

$$2/ \text{ أ/ الخاصية صحيحة من أجل } n = 0 \text{ لأن : } u_0 > \frac{2}{3}$$

$$\text{نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل } n \text{ أي } u_n > \frac{2}{3}$$

$$\text{و نثبت أنها صحيحة من أجل } n + 1 \text{ أي } u_{n+1} > \frac{2}{3}$$

$$\text{لدينا } u_n > \frac{2}{3} \text{ تعني } \frac{1}{2}u_n > \frac{1}{3} \text{ و تعني أيضا :}$$

$$\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{2}{3} \text{ أي : } u_{n+1} > \frac{2}{3}$$

$$\text{و منه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن : } u_n = \frac{2}{3}$$

2/ B و C النقطتان من الفضاء حيث :

$$B(0; 0; -3) \text{ و } C(-1; -4; 2)$$

أ/ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي  $(p)$  .

ب/ أحسب الطول AB .

ج/ أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي  $(p)$  .

3/ أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  المار بالنقطة C و

العمودي على المستوي  $(p)$  .

ب/ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

ج/ أحسب مساحة المثلث ABC .

### التمرين الرابع : (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كمايلي :

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

نرمز بـ  $(C_f)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$1/ \text{ أ/ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{ب/ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

و فسر هندسيا النتيجة .

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على كل مجال من مجالي تعريفها

ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ أ/ بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين

$(\Delta)$  و  $(\Delta')$  معادلتيهما على الترتيب :

$$y = x + 1 \text{ و } y = x$$

ب/ أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و

$(\Delta')$  .

$$4/ \text{ أثبت أن النقطة } \omega\left(0; \frac{1}{2}\right) \text{ هي مركز تناظر للمنحنى}$$

$(C_f)$  .

$$5/ \text{ أ/ بين أن المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلين } \alpha \text{ و } \beta$$

$$\text{حيث : } \ln 2 < \alpha < 1 \text{ و } -1,4 < \beta < -1,3$$

ب/ هل توجد مماسات لـ  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$  ؟

ج/ أرسم  $(\Delta)$  ،  $(\Delta')$  ثم المنحنى  $(C_f)$  .

د/ ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة

$$\text{حلول المعادلة : } (m-1)e^{-x} = m$$

2/ أ / لإثبات أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى دائرة مركزها  $O$  نبين أن :

$$OD = |z_D| \text{ حيث } OD = OC = OB = OA$$

$$OA = |z_A| \text{ و } OB = |z_B| \text{ و } OC = |z_C|$$

لدينا :  $|z_D| = |-z_A| = |z_A|$  و  $|z_B| = |\bar{z}_A| = |z_A|$  و  $|z_C| = |-z_A| = |z_A|$

$$OD = OC = OB = OA \text{ و منه :}$$

أي أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى دائرة مركزها  $O$ .

ب/ تعيين زاوية للدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  و يحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  : زاوية الدوران  $R$  الذي يحول  $A$  إلى  $B$  هي عمدة

$$\frac{z_B}{z_A} \text{ العدد المركب}$$

$$\text{أي : } \frac{3+3i}{-3-3i} \text{ أي : } -i \text{ و منه زاوية الدوران هي } -\frac{\pi}{2}$$

جـ / النقط  $A, O, C$  في استقامة تعني :

$$(\overline{OC}, \overline{OA}) = k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ أي :}$$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = -\pi \text{ و منه : } \frac{z_A}{z_C} = \frac{3+3i}{-3-3i} = -1 \text{ لدينا}$$

وبالتالي فإن  $A, O, C$  في إستقامة .

ملاحظة : بنفس الطريقة السابقة نبين إستقامة النقط  $D, O, B$ .

د/ طبيعة  $ABCD$  : من النتائج السابقة يتبين لنا أن قطعنا

المستقيم  $[DB]$  و  $[CA]$  متناصفتان في  $O$  و هما أقطار دائرة

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = -\frac{\pi}{2} \text{ فهما متقايسان و لدينا}$$

فهذا يعني أن  $ABCD$  مربع .

## النمرين الثالث :

1/ تعيين إحداثيات  $A$  نقطة تقاطع حامل  $(\vec{i}; O)$  مع المستوي  $(P)$

نعوض  $y$  بـ  $0$  و  $z$  بـ  $0$  في معادلة  $(P)$  نحصل على  $x = -3$

و بالتالي إحداثيات  $A$  هي  $(-3, 0, 0)$ .

ب/ لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_n > \frac{2}{3} \text{ لكن } u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{أي : } -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} < 0 \text{ و منه : } -\frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3}$$

$$\text{أي : } u_{n+1} - u_n < 0$$

و بالتالي فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

3/ أ / تبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية : من أجل كل  $n$  طبيعي

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية .

$$\text{أساسها } \frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{16}{3}$$

ب/ عبارة الحد العام لـ  $(v_n)$  هي :

$$v_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{لدينا من أجل كل } n \text{ طبيعي } u_n = v_n + \frac{2}{3}$$

$$\text{و منه } u_n = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

جـ / حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  :

$$S_n = -\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$= S_n + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$\text{أي : } S'_n = -\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

## النمرين الثاني :

$$1/ \text{ مميز المعادلة } z^2 - 6z + 18 = 0 \text{ هو } -36$$

و بالتالي فالعدد  $6i$  هو أحد جذري المميز .

و منه : للمعادلة حلين هما  $3+3i$  و  $3-3i$ .

$$3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ و } 3-3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$



## التمرين الرابع :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad /1$$

$$\text{ب/ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ لأن}$$

الدالة  $1 - e^x$  متزايدة تماما .

وهذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  .

2/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على مجالي تعريفها :

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ لدينا}$$

واضح أن  $f'(x) > 0$  إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على مجالي تعريفها .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3/ أ/ تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين : لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$(\Delta)$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

و لدينا أيضا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + \frac{1}{e^x - 1}) = 0$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  مما يعني أن  $(\Delta')$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$

ب/ وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  :

$$-\frac{1}{e^x - 1} \text{ تدرس إشارة الفرق } f(x) - x \text{ أي :}$$

الجدول الموالي يوضح إشارة  $-\frac{1}{e^x - 1}$  :

$-\frac{1}{e^x - 1}$	$-\infty$	+	0	+	$+\infty$
----------------------	-----------	---	---	---	-----------

2/ أ/ التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى المستوي  $(p)$  :

تأكد من أن إحداثيات B تحقق معادلة (P) .

ب/ حساب الطول AB : لدينا  $AB(0; 0; -3)$

$$AB = \sqrt{9 + 0 + 9} = 3\sqrt{2} \text{ ومنه :}$$

ج/ حساب المسافة بين النقطة C والمستوي  $(p)$  :

لتكن المسافة المطلوبة هي d ، ومنه :

$$d = \frac{|x_c - 2y_c + z_c + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{6}}$$

3/ أ/ التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(\Delta)$  :

بما أن  $(\Delta)$  عمودي على  $(P)$  فهذا يعني أن شعاع توجيه

$(\Delta)$  هو ناظمي لـ  $(P)$  و مركبات الشعاع الناظمي

للمستوي هي  $(1, -2, 1)$  و بالتالي التمثيل الوسيطى

للمستقيم الذي يشمل  $C(-1, -4, 2)$  و شعاع توجيه

له  $\vec{u}(1, -2, 1)$  هي :

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ مع } \lambda \text{ عدد حقيقى كفى .}$$

ب/ التحقق من أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  :

لكب تكون A نقطة من  $(\Delta)$  نبحث عن عدد حقيقى وحيد

$\lambda$  يحقق

$$\begin{cases} -3 = -1 + \lambda \\ 0 = -4 - 2\lambda \\ 0 = 2 + \lambda \end{cases} \text{ واضح أن } \lambda = -2 \text{ يحقق الجملة و}$$

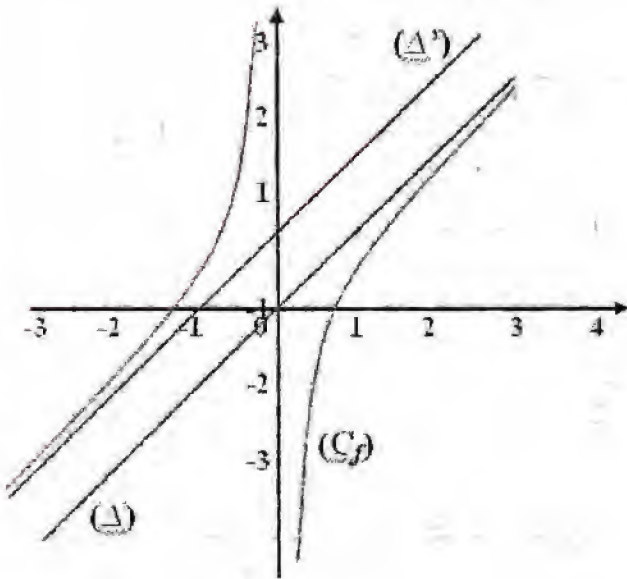
منه A نقطة من  $(\Delta)$  .

ج/ حساب مساحة المثلث ABC :

$$ABC \text{ مساحة المثلث} = \frac{1}{2} d \times AB = 6\sqrt{3}$$

$$\text{حيث : } AB = 3\sqrt{2} \text{ و } d = \frac{12}{\sqrt{6}}$$

جـ/ رسم  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$  :



د/ مناقشة حلول المعادلة  $(m-1)e^{-x} = m$

في حالة  $m = 1$  المعادلة  $(m-1)e^{-x} = m$  تكافئ  $m = 0$  وهذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة  $m = 0$  المعادلة  $(m-1)e^{-x} = m$  تكافئ  $m = 0$  وهذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة  $m \neq 1$  المعادلة  $(m-1)e^{-x} = m$  تكافئ

$$e^{-x} = \frac{m}{m-1}$$

إذا كان  $\frac{m}{m-1} < 0$  أي  $m \in ]0, 1[$  فإن المعادلة

$$e^{-x} = \frac{m}{m-1}$$
 ليست لها حلول في  $\mathbb{R}$  .

إذا كان  $\frac{m}{m-1} > 0$  أي  $m \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$

$$-x = \ln \frac{m}{m-1} \text{ تكافئ } e^{-x} = \frac{m}{m-1}$$

$$x = \ln \frac{m-1}{1} \text{ أي}$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :

حلول	$m$
$(m-1)e^{-x} = m$	
$\emptyset$	$[0, 1]$
$x = \ln \frac{m-1}{1}$	$]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$

إذن في المجال  $]0; -\infty[$  يكون  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  و في

المجال  $]0; +\infty[$  يكون  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  .

وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta')$  ندرس الفرق

$$f(x) - x - 1 = \frac{-e^x}{e^x - 1} \text{ أي}$$

$\frac{-e^x}{e^x - 1}$	$-\infty$	$+$	$0$	$+$	$+\infty$
------------------------	-----------	-----	-----	-----	-----------

إذن في المجال  $]0; -\infty[$  و في المجال يكون  $(C_f)$  فوق

$(\Delta')$  و في المجال  $]0; +\infty[$  يكون  $(C_f)$  تحت  $(\Delta')$  .

4/ حتى تكون النقطة  $\omega(0; 0,5)$  مركز تناظر  $(C_f)$  يجب أن يتحقق مايلي :

مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة للعدد 0 . و هو محقق ، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :

$$f(-x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } f(-x) + f(x) &= -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} \\ &= -\frac{e^x}{1 - e^x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} = 1 \end{aligned}$$

مما يعني أن النقطة  $\omega(0; 0,5)$  هي مركز تناظر  $(C_f)$  .

5/ الدالة  $f$  رتيبة تماماً على المجال  $[\ln 2, 1]$  و لدينا :

$$f(1)f(\ln 2) < 0$$

لأن :  $f(\ln 2) \approx -0,31$  و  $f(1) \approx 0,42$

و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد

من المجال  $[\ln 2, 1]$

بحيث  $f(\alpha) = 0$  و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد

الحقيقي  $\beta$  من المجال  $[-1, 4; -1, 3]$  بحيث

$$f(\beta) = 0$$

ب/ مماسات  $(C_f)$  التي توازي المستقيم  $(\Delta)$  تحقق

$$f'(x) = 1$$

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \text{ أي } 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$$

هذه المعادلة ليست لها حلول في  $\mathbb{R}^*$  أي أنه لا توجد

مماسات توازي  $(\Delta)$  .

## الاختبار الخامس

بكالوريا جـ 2009

### التمرين الأول : (3,5 نقاط)

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_1 = 2 \text{ و } u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

و :  $u_0 = 1$  . المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- أحسب  $v_1$  و  $v_0$  .

2- برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3- أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

جـ) بين أن ( $u_n$ ) متقاربة .

### التمرين الثاني : (5 نقاط)

$P(Z)$  كثير حدود حيث :

$$P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$$

و  $Z$  عدد مركب :

1- حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $P(Z) = 0$  .

2- نضع :  $Z_1 = 1 + i$  ، و :  $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$  .

أ- أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي .

ب- أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

3- أ)  $n$  عدد طبيعي عين قيم  $n$  حيث يكون العدد

$$\left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^n \text{ حقيقياً .}$$

$$3- \text{ ب) أحسب قيمة العدد } \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^{456} .$$

### التمرين الثالث : (4 نقاط)

القضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط :  $A(1; 0; 2)$  ،  $B(0; 2; 1)$  ،  $C(2; 1; 3)$

1-  $(P)$  مستو معادلة له من الشكل :  $X - Z + 1 = 0$

أ) بين المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$  .

ب) ما طبيعة المثلث  $ABC$  .

2- أ) تحقق أن النقطة  $D(2; 3; 4)$  لا تنتمي إلى  $(ABC)$

ب) ما طبيعة  $ABCD$  .

3- أ) أحسب المسافة بين  $D$  و المستوي  $(ABC)$  .

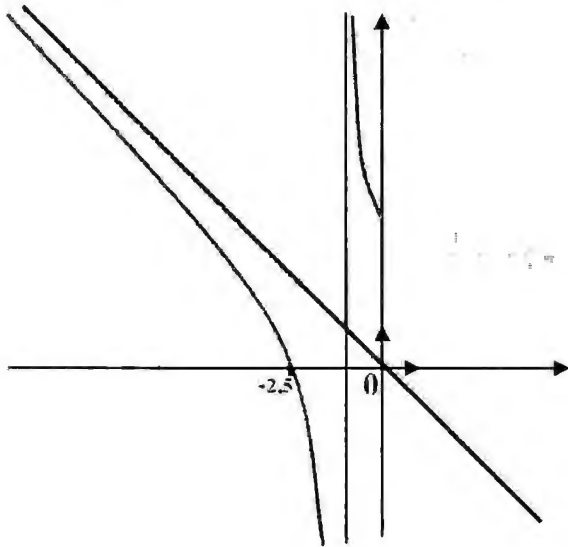
ب) أحسب حجم  $ABCD$  .

### التمرين الرابع : (5,7 نقاط)

1-  $f$  دالة معرفة على :  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1} \text{ ، } (C_f) \text{ تمثيلها البياني في}$$

مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هي مبين في الشكل :



1- أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$  .

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات  $f$  شكل جدول تغيراتها .



## حل الاختبار الخامس

### التمرين الأول :

1- حساب  $v_1$  و  $v_0$  :

لدينا :  $v_n = u_{n+1} - u_n$

و منه :  $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

2- البرهان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها :

$(v_n)$  متتالية هندسية معنا :  $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  و منـــــــــــــــــه :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

و منه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$

3- أ) حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  و منه :

$$S_n = v_0 \left[ \frac{1-q^n}{1-q} \right] = 1 \left[ \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \right] = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

ب) البرهان أن :  $u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$  من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$

لدينا :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

و منه :  $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$

بعد التبسيط :  $S_n = -u_0 + u_n$

و منه :  $u_n = u_0 + S_n$  ،

$$u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 \text{ و أخيراً :}$$

2-  $g$  دالة معرفة المجال  $[0; +\infty[$  كمايلي :

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1} \quad \text{و} \quad (C_g) \text{ تمثيلها البياني في}$$

مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

(أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$  .

(ب) تحقق من أن  $(C_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$

عند  $+\infty$  يطلب تعيين معادلة له .

(ج) أدرس تغيرات  $g$  .

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كمايلي :

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

(أ-1) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ، و :

ماذا تستنتج ؟  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

(ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

2- أكتب معادلتى المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة

التي فاصلتها  $x_0 = 0$  .

3- أرسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$  .

4- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  و

المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = -\frac{1}{2} , \quad x = \frac{1}{2} , \quad y = 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} : \text{الشكل الجبري}$$

بضرب حديه في مرافق المقام و بعد الحسابات نجد :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4} + i \frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

الشكل الأسّي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{12} \text{ استنتاج القيمة المضبوطة لكل من}$$

من الجواب السابق لدينا :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4} + i \frac{(1+\sqrt{3})}{4} \dots\dots\dots (2)$$

بالمطابقة بين الشكلين نجد (1) و (2) نجد :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{(1-\sqrt{3})}{4} + i \frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ و منه :}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$(i-3) \text{ تعيين قيم } n \text{ بحيث يكون العدد } \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^n \text{ حقيقياً :}$$

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n e^{i \left( \frac{7n\pi}{12} \right)} \text{ لدينا :}$$

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left( \cos \frac{7n\pi}{12} + i \sin \frac{7n\pi}{12} \right)$$

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^n \text{ حقيقياً معناه : } \sin \frac{7n\pi}{12} = 0 \text{ و منه :}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad n = 12k$$

(ج) تبين أن  $(u_n)$  متقاربة :

$$(u_n) \text{ متقاربة معناه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{R}$$

ثابت . لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$$

## التمرين الثاني :

-1 حل المعادلة :  $P(Z) = 0$  في المجموعة  $\mathbb{C}$ .

لدينا :  $P(Z) = 0$  معناه :

$$(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)=0$$

و منه :  $(Z^2-2Z+4)=0$  أو  $(Z-1-i)=0$

و منه :  $(Z-1-i)=0$  أي :  $Z=1+i$

$$(\star) \dots\dots (Z^2-2Z+4)=0$$

حل المعادلة  $(\star)$  نستعمل المميز المختصر :

$$\Delta' = b'^2 - ac = (1)^2 - (1)(4) = -3 \text{ لدينا :}$$

أي :  $\Delta' = (\sqrt{3}i)^2$  . ومنه حلي المعادلة  $(\star)$  هما :

$$z'' = \frac{1+\sqrt{3}i}{1} \text{ و } z' = \frac{1-\sqrt{3}i}{1}$$

و منه حلول المعادلة  $P(Z) = 0$  هي :

$$z = 1 - \sqrt{3}i, z = 1 + \sqrt{3}i, z = 1 + i$$

-2 كتابة العددين  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي :

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ لدينا :}$$

$$z_2 = 1-\sqrt{3}i = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(ب) كتابة العدد  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكلين الجبري و الأسّي :

3-أ) حساب المسافة بين D و المستوي (ABCD) :

$$d(\Delta; ABC) = \frac{|1(2) + 0(3) - 1(4) + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا :}$$

ب/ حساب حجم رباعي الوجوه ABCD :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \text{ و } h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ حيث } V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ لدينا :}$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \text{ و منه :}$$

### النمرين الرابع :

1-أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة I — I :

لدينا :  $I = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0]$  و

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1} \text{ و منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( 1 + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( 1 + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ملاحظة : يمكن استنتاج هذه النهايات من البيان .

ب) تشكيل جدول التغيرات بقراء بيانية :

x	$-\infty$	-1	0
g(x)	-	-	-
g(x)	$+\infty$	$+\infty$	4

2-أ) حساب نهاية f عند  $+\infty$  :

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1} \text{ معرفة على المجال } [0 ; +\infty[ \text{ :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\text{ب) حساب } \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{456}$$

حسب دستور موافر لدينا :

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{456} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} \left( \cos \frac{7(456)\pi}{12} + i \sin \frac{7(456)\pi}{12} \right)$$

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{456} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} (\cos 0 + i \sin 0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456}$$

$$\frac{7(456)\pi}{12} = 266\pi = (133)2\pi + 0 \text{ لأن :}$$

### النمرين الثالث :

1-أ) تبين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) :

المستوي (P) هو المستوي (ABC) معناه أن احداثيات

النقط A, B, C تحقق صحة معادلة (P) .

لدينا :  $A \in (P)$  لأن :  $1 + 0 - 2 + 1 = 0$  .

$B \in (P)$  لأن :  $0 + 0(2) - 1 + 1 = 0$  .

$C \in (P)$  لأن :  $2 + 0(1) - 3 + 1 = 0$  .

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1.1 + 2.1 - 1.1 = 0$$

و منه المثلث ABC قائم في A .

2-أ) التحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستوي

(ABC)

D لا تنتمي إلى (ABC) معناه : احداثيات النقطة D

لا تحقق صحة المعادلة :  $x - z + 1 = 0$  .

لدينا :  $2 + 0(3) - 1(4) + 1 \neq 0$  .

و منه :  $D \notin (ABC)$  .

ب) تعيين طبيعة ABCD :

ABCD هو رباعي وجوه .



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} <$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h-5}{(h+1)} = -5$$

نستنتج أن  $k$  ليست قابلة للاشتقاق عند  $0$  لأن العدد المشتق من اليمين  $(-3)$  لا يساوي العدد المشتق من اليسار  $(-5)$ .

(ب) إعطاء تفسير هندسي للنتيجة :

بما أن الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق من اليمين و قابلة للاشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة  $k$  يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها  $0$ .

يمكن القول أن النقطة التي احداثياتها  $(0 ; 4)$  هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة  $k$ .

(2) كتابة معادلي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  :

- معادلة نصف المماس  $(\Delta_1)$  :

$(\Delta_1)$  هو نصف المماس عند  $x_0 = 0$  حيث  $x_0 \geq 0$  :

لدينا :  $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$  :

ومنه :  $y = -3(x - 0) + 4$  أي  $y = -3x + 4$  :

- معادلة نصف المماس  $(\Delta_2)$  :

$(\Delta_2)$  هو نصف المماس عند  $x_0 = 0$  حيث  $x_0 \leq 0$  :

لدينا :  $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$  :

ومنه :  $y = -5(x - 0) + 4$  أي  $y = -5x + 4$  :

3- رسم كلا من  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  و المنحنى  $(C_k)$  :

لرسم المنحنى  $(C_k)$  نلاحظ :

إذا كانت  $x \leq 0$  فإن  $k(x) = f(x)$  ومنه :  $(C_f) = (C_k)$  :

إذا كانت  $x \geq 0$  فإن  $k(x) = g(x)$  ومنه :  $(C_g) = (C_k)$  :

(ب) التحقق من أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{u}{x+1} \right) = 0$$

(ج) دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

اتجاه التغير :

لدينا :  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0 ; +\infty[$  حيث :

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$  معناه :  $(x-1)(x+3) = 0$  أي  $x=1$  :

إشارة المشتق هي حسب الجدول التالي :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

جدول التغيرات : **Hard equation**

$x$	$-\infty$	1	0
$g(x)$	-		+
$g(x)$	4	$f(1)$	$+\infty$

ملاحظة :  $f(1) = 3$  :

حساب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$$

$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} <$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h-3}{(h+1)} = -3$$

# الاخبار السامس

بكالوريا جـ — وان 2009

## التمرين الاول : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط :  $A(2; 3; -1)$  ،  $B(1; -2; 4)$

$D(1; -1; -2)$  ،  $C(3; 0; -2)$

و ليكن  $(\pi)$  المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية :

$$2x - y + 2z + 1 = 0$$

— الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1- النقط  $A, B, C$  في استقامية .

2-  $(ABD)$  مستوي معادلة ديكارتية لـ : —

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

3- المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$  .

4- المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(\pi)$  هو النقط —

$$H(1; 1; -1)$$

## التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 2z + 4 = 0$

2- نسمي  $z_1$  و  $z_2$  حلي هذه المعادلة .

أ) اكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي .

ب)  $A, B, C$  هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_B = 1 + i\sqrt{3} , z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$$

بحق  $(i^2 = -1)$  .

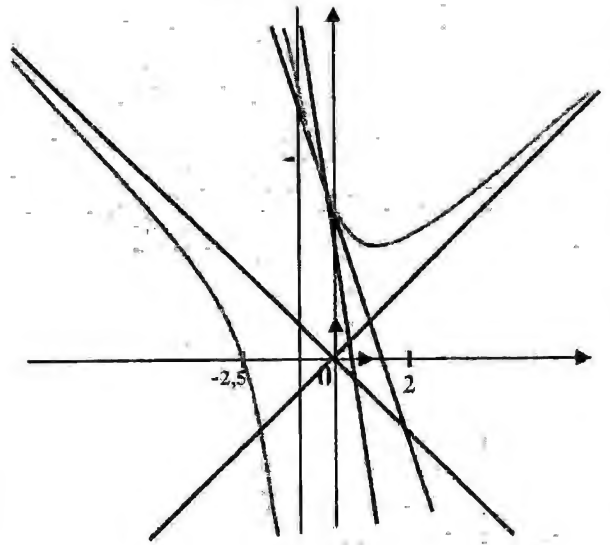
أحسب الأطوال  $AB, AC, BC$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

ج) جد الطويلة و عمده للعدد المركب  $Z$  حيث :

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

د) أحسب  $Z^3$  و  $Z^6$  ثم استنتج أن  $Z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل

كل عدد طبيعي  $k$  .



(4) حساب المساحة :

نرمز بـ  $A$  لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالمنحنى

$(C_k)$  و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = -\frac{1}{2} , x = \frac{1}{2} , y = 0$$

ومنه :

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

$$= \left[ -\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1) \right]_{\frac{1}{2}}^0 + \left[ -\frac{x^2}{2} + 4\ln(x+1) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{8} - 4\ln 2 + \frac{1}{8} + 4\ln 3 - 4\ln 2 = 4\ln 3 (u.a)$$

## النمرين الثالث : (05 نقاط)

( $u_n$ ) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  و

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} \text{ حيث : } q$$

1. (أ) احسب  $u_2$  و الأساس  $q$  لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول  $u_1$ .

(ب) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) احسب  $S_n$  حيث :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  ثم عين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون :  $S_n = 728$

2. ( $v_n$ ) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n, \quad v_1 = 2$$

(أ) احسب  $v_2$  و  $v_3$ .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

بين أن ( $w_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

(ج) أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $w_n$  بدلالة  $n$ .

## النمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

$h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كمايلي :

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

$$1- \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$$h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1} ; ]-1; +\infty[$$

و استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم ألجز جدول تغيراتها .

3- احسب  $h(0)$  و استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

الجزء الثاني :

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كمايلي

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

للدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

1. (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ، ثم فسر هذه النتيجة بياناً .

(ب) باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  ، برهن أن

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

(ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$

(د) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1))$  و استنتج وجود

مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

2- بين أنه من أجل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3- بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقطع مستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  عند

نقطة قاصتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

4- أرسم ( $C_f$ ) .

5- احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى ( $C_f$ ) و

المستقيمات التي معادلاتها :  $y = x - 1$  ,  $x = 0$  ,  $x = 1$



## حل الاختبار السادس

### النميرين الأول :

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1- الإجابة خاطئة لأن :  $\overrightarrow{AB}(-1, -5, 5)$  لا يوازي

$\overrightarrow{AC}(1, -3, -1)$  أي :  $\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-5}$

2- الإجابة صحيحة لأن : الثلاثية إحداثيات النقطة  $C, B, A$  تحقق صحة المعادلة :

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

لدينا :  $25(2) - 6(3) - (-1) - 33 = 0$  أي  $A \in (ABD)$

$25(1) - 6(-2) - 4 - 33 = 0$  أي  $B \in (ABD)$

$25(1) - 6(-1) - 2 - 33 = 0$  أي  $D \in (ABD)$

3- الإجابة خاطئة لأن الشعاع  $\overrightarrow{CD}(-2, -1, 0)$  لا يوازي الشعاع الناقص  $\overrightarrow{n_\pi}(2, -1, 2)$  أي :  $\frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$

4- الإجابة خاطئة لأن :  $HB = \sqrt{34} \neq d(B; (\pi)) = \frac{17}{3}$

### النميرين الثاني :

1- حل المعادلة  $z^2 - 2z + 4 = 0$  في المجموعة  $\mathbb{C}$  :

حل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر :  $\Delta' = b' - ac$

لدينا :  $\Delta' = (-1)^2 - (1)(4) = -3$  أي  $\Delta' = (\sqrt{3}i)^2$

و منه حلتي المعادلة (c) هما :

$$z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1}, \quad z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1}$$

2- أ ) كتابة العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي :

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا :

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب ) حساب الأطوال  $AB, AC, BC$  :

$$AB = |z_A - z_B| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_A - z_C| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3}$$

- استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  :

$$\text{لدينا : } AB^2 = 12 \text{ و } BC^2 + AC^2 = 9 + 3 = 12$$

و منه المثلث  $ABC$  قائم في  $C$  لأن :  $BC^2 + AC^2 = AB^2$

ج ) إيجاد طولية و عمدة للعدد المركب  $Z$  :

$$\text{لدينا : } Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \text{ و منه :}$$

$$|Z| = \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z_C - z_B) - \arg(z_A - z_B)$$

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \arg(-2\sqrt{3}i) + 2k\pi$$

$$\arg(Z) = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

حساب  $Z^3$  و  $Z^6$  ثم استنتاج أن  $Z^{3k}$  :

$$\text{لدينا : } |Z| = \frac{1}{2} \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ أي}$$

$$Z^3 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}} \text{ و منه : } Z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{و منه : } Z^3 = \frac{1}{8}e^{i\pi} = -\frac{1}{8}$$

$$3^n - 1 = 278 \text{ : معناه } S_n = 728$$

$$n = 6 \text{ : أي } 3^n = 279 = 3^6$$

2. أ) حساب  $v_2$  و  $v_3$  :

$$\text{لدينا : } w_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \text{ و } v_1 = 2$$

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2}(2) + 2 = 5$$

و منه :

$$v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2}(5) + 6 = \frac{27}{2}$$

ب) تبين أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  :

$$(w_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ معناه : } w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$$

$$\text{لدينا : } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$$

و منه :

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{أي : } w_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}w_n$$

ج) كتابة  $w_n$  بدلالة  $n$  و استنتاج  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لدينا : } w_n = w_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{حيث : } w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{و منه : } w_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{لدينا : } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ و منه : } w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n}$$

$$\text{أي : } v_n = u_n \left( w_n + \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{إذن : } v_n = 2 \cdot 3^{n-1} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right)$$

$$v_n = 4 \cdot 3^{n-2} (2^{-n} + 1)$$

$$\text{لدينا : } Z^6 = \left( \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{3}} \right)^6 = \frac{1}{2^6} e^{i \frac{6\pi}{3}}$$

$$\text{و منه : } Z^6 = \frac{1}{64} e^{i 2\pi} = \frac{1}{64}$$

$$\text{لدينا : } Z^{3k} = \left( \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{3}} \right)^{3k} = \frac{1}{2^3} e^{i \frac{3k\pi}{3}} = \frac{1}{8} e^{ik\pi}$$

نميز حالتين هما :

$$\text{إذا كان } k \text{ عدد طبيعي زوجي فإن : } Z^{3k} = \frac{1}{8} e^{ik\pi} = \frac{1}{8}$$

$$\text{إذا كان } k \text{ عدد طبيعي فردي فإن : } Z^{3k} = \frac{1}{8} e^{ik\pi} = -\frac{1}{8}$$

و في الحالتين  $Z^{3k}$  هو عدد حقيقي .

## التمرين الثالث :

1. أ) حساب  $u_2$  و الأساس  $q$  و استنتاج الحد الأول :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} \frac{u_2}{q} + 2u_2 + u_2 q = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases}$$

$$\text{و منه : } \begin{cases} 1 + 2q + q^2 = \frac{16}{3}q \\ u_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} q = 3 \vee q = \frac{1}{3} \\ u_2 = 6 \end{cases}$$

و بما أن المتتالية متزايدة فإن :  $u_2 = 6$  و  $q = 3$

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ و منه : } u_2 = u_1 q$$

ب) كتابة عبارة الحد  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$\text{و منه : } S_n = 2 \left( \frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 3^n - 1$$

تعيين العدد الطبيعي  $n$  حيث يكون :  $S_n = 728$

## التمرين الرابع :

### الجزء الأول : Hard equation

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

معرفة على  $]-1; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2 + \ln(x+1)) = -\infty$$

$$h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1} \quad (2) \text{ تبين أن :}$$

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة  $h$  و تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن  $x > 1$  فإن  $h'(x) > 0$  ومنه  $h$  متزايدة تماماً .

$x$	$1-$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$			$+\infty$

(3) حساب  $h(0)$  و استنتاج إشارة  $h(x)$  :

$h(0) = 0$  و إشارة  $h(x)$  هي حسب الجدول التالي :

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$h(x)$		-	+

الجزء الثاني :

1.1 حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و تفسير النتيجة بياناً :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( -2 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (\ln(x+1)) = -\infty \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{-1}{x+1} \right) = -\infty \quad \text{و}$$

لستنتج وجود مستقيم مقارب معادلته :  $y = -1$

—  $(C_f)$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln u}{u} \right) = 0 \quad \text{ب ( البرهان أن :}$$

$$u = e^t \text{ نضع } t = \ln(u) \text{ و منه :}$$

لدينا : إذا كان  $u \rightarrow +\infty$  فإن  $t \rightarrow +\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln u}{u} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{e^t} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^t} \right) = 0 \quad \text{و منه :}$$

— استنتاج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  : لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$$

(د) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1))$  : لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

\* استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  .

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$  و منه المنحنى يقبل

مستقيم مقارب مائل معادلته :  $y = x - 1$  في جوار  $+\infty$  .

(هـ) دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

ندرس إشارة الفرق

$$(f(x) - (x-1)) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة  $-\ln(x+1)$

لأن :  $x+1 > 0$  و  $-\ln(x+1) = 0$

معناه :  $\ln(x+1) = 0$  أي  $x = 0$

◆  $-\ln(x+1) \geq 0$  معناه :  $\ln(x+1) \leq 0$

أي :  $-1 < x \leq 0$

◆  $-\ln(x+1) \leq 0$  معناه :  $\ln(x+1) \geq 0$

أي :  $x \geq 0$

نستنتج مايلي :

◆  $-1 < x \leq 0$  معناه  $(C_f)$  فوق المستقيم المقارب المائل .

◆  $x = 0$  معناه  $(C_f)$  يقطع المستقيم المقارب في النقطة

$(0; -1)$  .

◆  $x \geq 0$  معناه  $(C_f)$  تحت المستقيم المقارب المائل .

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2} \quad (2) \text{ تبين أن :}$$

لدينا :  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  حيث :



(5) حساب المساحة :

نرمز بـ  $A$  لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمات التي معادلاتها :  $x=0$  ،  $x=1$  ،  $y=x-1$  .

$$A = \int_0^1 ((x-1) - f(x)) dx = \int_0^1 \left( \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx \quad \text{و منه :}$$

$$u' = \frac{1}{x+1} \quad \text{بوضع : } u = \ln(x+1) \quad \text{فإن :}$$

$$\text{الدالة : } x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{من الشكل :}$$

$x \rightarrow u(x) \cdot u'(x)$  و منه الدالة الأصلية لها هي من الشكل :

$$x \rightarrow \frac{1}{2} [u(x)]^2 + c$$

و منه :

$$A = \frac{1}{2} [(\ln(x+1))^2]_0^1 = \frac{1}{2} [(\ln(2))^2 - (\ln(1))^2]$$

$$A = \frac{1}{2} (\ln(2))^2 \quad \text{أي :}$$

## الاخبار السابع

بكالوريا جوان 2008

### التمرين الأول : (3 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط .  
عين الجواب الصحيح مُعللاً اختيارك . نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة :

$$B(4,1,0) \quad ; \quad A(1,3,-1)$$

$$D(3,2,1) \quad ; \quad C(-2,0,-2)$$

و المستوي  $(P)$  الذي معادلته :  $4x - 3z - 4 = 0$

$$1- \text{المستوي } (P) \text{ هو : } (1) \quad (BCD) - (2) \quad (ABC) - (3)$$

$$(ABD) - (4)$$

2- شعاع ناطمي للمستوى  $(P)$  هو :

$$\vec{n}_1(1,2,1) \quad (1) \quad \vec{n}_2(-2,0,6) \quad (2) \quad \vec{n}_3(2,0,-1) \quad (3)$$

3- المسافة بين النقطة  $D$  و المستوي  $(P)$  هي :

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (2) \quad \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (3)$$

### التمرين الثاني : (5 نقاط)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n + 2 \quad \text{و من أجل كل عدد طبيعي } n \quad u_0 = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} (x+1) - \ln(x+1) = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{و منه : } f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات :

إشارة  $f'(x)$  هي حسب إشارة  $h(x)$  : جدول التغيرات :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

3- تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$

المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم :  $y = 2$  معناه المعادلة

$$f(x) = 2$$

تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  محصوراً بين 3,3 و 3,4 .

$f$  متزايدة على المجال  $[3,3; 3,4]$  حسب جدول التغيرات

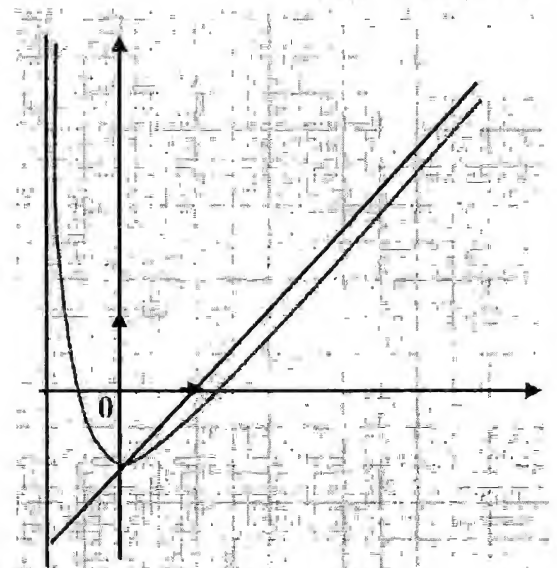
و لدينا :  $f(3,3) = 1,96$  و  $f(3,4) = 2,06$

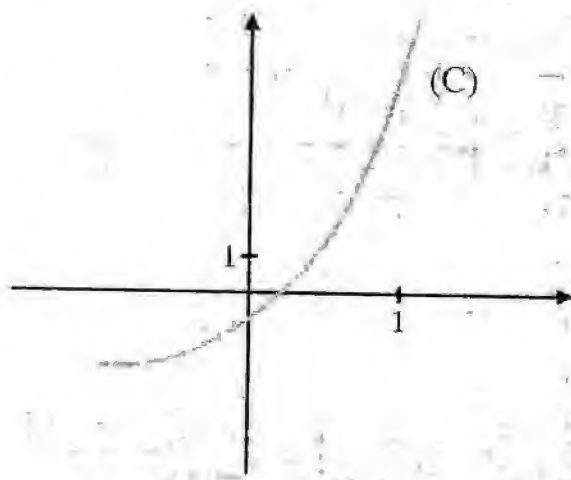
و نلاحظ أن :  $f(3,3) < 2 < f(3,4)$  .

- و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي

وحيد  $\alpha$  محصوراً بين 3,3 و 3,4 . بحيث :  $f(\alpha) = 2$

(4) رسم المنحنى  $(C_f)$  :





1. أ. ارسم في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  و المنحنى  $(d)$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

1. ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود :  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  .

1. ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها .

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 6$

2. ب- تحقق أن  $(u_n)$  متزايدة .

2. ج- هل  $(u_n)$  متقاربة ؟ برر إجابتك .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة  $(u_n)$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

### التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2. نعتبر المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

النقطتين  $A$  و  $B$  اللتان لاحتقاهما  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب حيث :

$$z_B = -2 - 2i \text{ و } z_A = 2 + i$$

عين  $z_\omega$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$  ذات القطر  $[AB]$

3. لتكن  $C$  النقطة ذات اللاحقة  $z_C$  حيث :  $z_C = \frac{4-i}{1+i}$  اكتب  $z_C$  على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  .

4. أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $M_0(z_0)$  و نسبته  $k$  ( $k > 0$ ) و زاويته  $\theta$  و الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  و النقطة  $M'(z')$  هي :  $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

4. ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل  $S$

$$\text{المعرف بـ : } z' + \frac{1}{2}i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \left( z + \frac{1}{2}i \right)$$

### التمرين الرابع : (7 نقاط)

المنحنى  $(C)$  المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال :  $]-1, +\infty[$  كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1. أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  و حدد  $g(0)$  وإشارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$

1. ب- علل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$  يحقق :

$$g(\alpha) = 0$$

1. ج- استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1, +\infty[$  .

2-  $f$  هي الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  بما

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

يأتي :  $f(x)$  و ليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \text{ حيث } f' \text{ هي الدالة المشتقة لـ } f$$

للدالة  $f$

ب- عين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  و فسر النتيجة بيانيا .

ج- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) - (x+1)]$

و فسر النتيجة بيانيا .

د- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

3- نأخذ  $\alpha \approx 0,26$  .

أ- عين مدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$  .

ب- أرسم المنحنى  $(\Gamma)$  .

4. أ- أكتب  $f(x)$  على الشكل :  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$  حيث

$a$  و  $b$  عددان حقيقيان .

4. ب- عين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال :  $]-1, +\infty[$

و التي تحقق :  $F(1) = 2$  .

**Hard\_equation**



# Hard\_equation





أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

**Hard\_equation**